Übungsstunde 4:

Plan:

- Vektorräume (VR)
- Untervektorräume (UVR / Unterraum)
- Linearkombination
- Lineare Unabhängigkeit
- Erzeugendensystem
- Basis, Dimension

Serie 2: Beweise

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{bmatrix}$$

2.4b) Zeigen Sie, dass für *beliebige* quadratische Matrizen C gilt, dass $C + C^T$ symmetrisch ist.

$(C+C^T)^T \overset{!}{=} C + C^T$ damit die Summe symmetrisch ist

$(C+C^T)^T = C^T + C^{T^T} = C^T + C = C + C^T \quad \square$

↳ Kommutativität der Matrixaddition

Vektorräume:

(i) $\forall u, w \in V$: $\quad u + w = w + u$

(ii) $\forall u, v, w \in V$: $\quad (u+w)+v = u + (w+v)$

(iii) $\exists 0 \in V$ s.d. $\forall u \in V$: $\quad u + 0 = u$ $\quad$ 0 heisst Nullvektor (muss nicht "0" sein)

(iv) $\forall u \in V \ \exists -u \in V$ s.d.: $\quad u + (-u) = 0$

(v) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in V$: $\quad (\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha (\beta \cdot u)$

(vi) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in V$: $\quad (\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$

(vii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, w \in V$: $\quad \alpha (u + v) = \alpha u + \alpha v$

(viii) $\forall u \in V$: $\quad \mathbb{1} \cdot u = u$ $\quad$ $\mathbb{1}$ heisst Einheitselement ↳ neutrales Element gegenüber der Multipl.

Bsp. 4.1: $\mathbb{R}^n = \left\{ \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$ ist ein VR

Bsp. 4.2: $V = \left\{ \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ 1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad x, y \in V$$

$$\text{(iii)} \; \exists\, 0 \in V: \; \underline{x} + 0 = \underline{x}, \quad \underline{x} + \underline{y} \stackrel{!}{=} \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ 2 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix} \notin V$$

<u>Untervektorraum</u>: Eine <u>nichtleere</u> Teilmenge $U \subseteq V$ heisst UVR falls:

(a) $\forall a, b \in U$: $\quad a + b \in U$

(b) $\forall a \in U, \forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\quad \alpha \cdot a \in U$

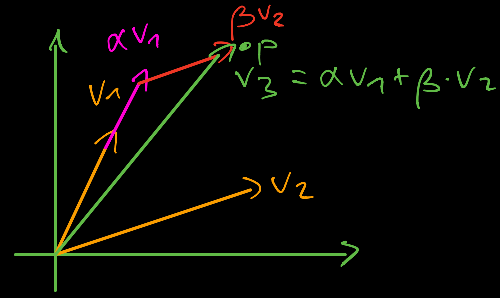
Bsp. 4.3: $U = \left\{ \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 \cdot x_2 \geq 0 \right\}$

a) $$\left.\begin{array}{l} \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in U \\ \underline{y} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix} \in U \end{array}\right\} \; \underline{x} + \underline{y} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \notin U \quad \lightning$$

Bsp. 4.4: $U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Linearkombinationen:

Seien $v_1, v_2, \dots, v_n$ Vektoren in einem Vektorraum V und $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, dann heisst



$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

die Linearkombination der Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Bsp. 4.5: $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 7 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Lineare Unabhängigkeit:

Sei V ein VR, dann heissen die Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n$ linear unabh., falls das LGS

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i = 0 \iff \sum_{i=1}^{n-1} x_i v_i = -x_n v_n$$

nur die triviale Lösung $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ besitzt.

Bemerkung:

- Sind $v_1, v_2, \dots, v_n$ nicht lin. unabh., so heissen sie lin. abh.
- Falls eine Menge den Nullvektor beinhaltet ist sie lin. abh., da:

$$0 = \overset{x_1}{\boxed{1}} \cdot \overset{\text{Nullvektor}}{0} + \underset{x_2}{\boxed{0}}\, v_2 + \underset{x_3}{\boxed{0}} \cdot v_3 + \dots + 0 \cdot v_n \Rightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bsp. 4.6: $M = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} \to 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ↯

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 0$$

Bsp. 4.7: $M = \left\{ \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\5\end{bmatrix} \right\} \rightarrow \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\0\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\\5\end{bmatrix}$ ↯

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix}2\\0\\4\end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix}2\\2\\5\end{bmatrix} \overset{!}{=} \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&2&2\\2&0&2\\3&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$1x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$$
$$2x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 0$$

Gaussen $\rightarrow$
$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&2&0\\2&0&2&0\\3&4&5&0\end{array}\right] \xrightarrow[\text{III}-3\text{I}]{\text{II}-2\text{I}} \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&2&0\\0&-4&-2&0\\0&-2&-1&0\end{array}\right] \xrightarrow{\text{III}-\frac{1}{2}\text{II}} \left[\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&2&2&0\\0&\boxed{-4}&-2&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$\rightarrow$ Rang $2 < 3$

$\rightarrow x_3 \in \mathbb{R}$

$x_3 = t \in \mathbb{R}$

Erzeugendensystem:

Kann man jeden Vektor v eines Vektorraumes V als Linearkombination der Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ darstellen, also

$$V = \operatorname{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

dann nennt man diese Vektoren ein erzeugendes System von V.

V heisst dann endlich dimensional.

Bsp. 4.8: Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$

- Die Basisvektoren $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$
- plus jeder beliebige Vektor!

$$M = \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \right\}$$

Merkt euch: M darf linear abh. Vektoren enthalten!

Bsp. 4.9.:

$$\left.\begin{aligned} p_1(x) &= x^3 + x^2 \\ p_2(x) &= x^2 - 2x - 4 \\ p_3(x) &= 3x + 4 \\ p_4(x) &= 2x^2 + 3 \end{aligned}\right\}$$

$p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathcal{P}_4$

Erzeugen p_1, p_2, p_3, p_4 den $\mathcal{P}_4$?

$\mathcal{P}_4$: Alle Polynome der Ordnung ≤ 4

Umgeschrieben: Finde ich $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ s.d.:

$$\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x) + \alpha_4 p_4(x) = q(x) \quad \forall q(x) \in \mathcal{P}_4$$

1) Nein, wir können x^4 nicht mittels einer Linearkombination darstellen.
2) Standardbasis vom $\mathcal{P}_4$ ist $1, x, x^2, x^3, x^4 \to \mathcal{P}_4$ ist 5 dimensional, wir haben aber nur 4 Vektoren.

Basis:

Intuitiv: Erzeugendensystem ohne lin. abh. Vektoren

Theorem: Falls V n-dimensional ist $(\dim(V) = n)$ gilt:

(i) Mehr als n Vektoren sind lin. abhängig.

(ii) Weniger als n Vektoren sind nicht erzeugend.

(iii) Genau n Vektoren sind genau dann linear unabhängig wenn sie erzeugend sind.
Sie bilden dann eine Basis von V!

Bsp. 4.10: Findet eine Basis zum $\mathbb{R}^3$ aus

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{Gaussen}} \begin{matrix} -2 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{matrix} \quad \xrightarrow[\mathrm{III} + \frac{1}{2}\mathrm{I}]{\mathrm{II} + \frac{1}{2}\mathrm{I}} \quad \begin{matrix} -2 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 3.5 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1.5 & -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III} + \mathrm{II}} \begin{matrix} -2 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{1/2} & 0 & 3.5 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5} & 0 \end{matrix} \Rightarrow \text{Rang } 3$$

Nehmen ursprüngliche Spalten zu den Pivot Elementen:

$$\text{Basis} = \underline{\underline{\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}}}$$

Dimension:

- Anzahl der Vektoren, aus denen die Basis des Vektorraumes besteht

Bsp. 4.11: $\mathbb{R}^3 \rightarrow$ 3-dimensional

$\mathcal{P}_4 \rightarrow \text{Basis} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\} \rightarrow 5$ dimensional